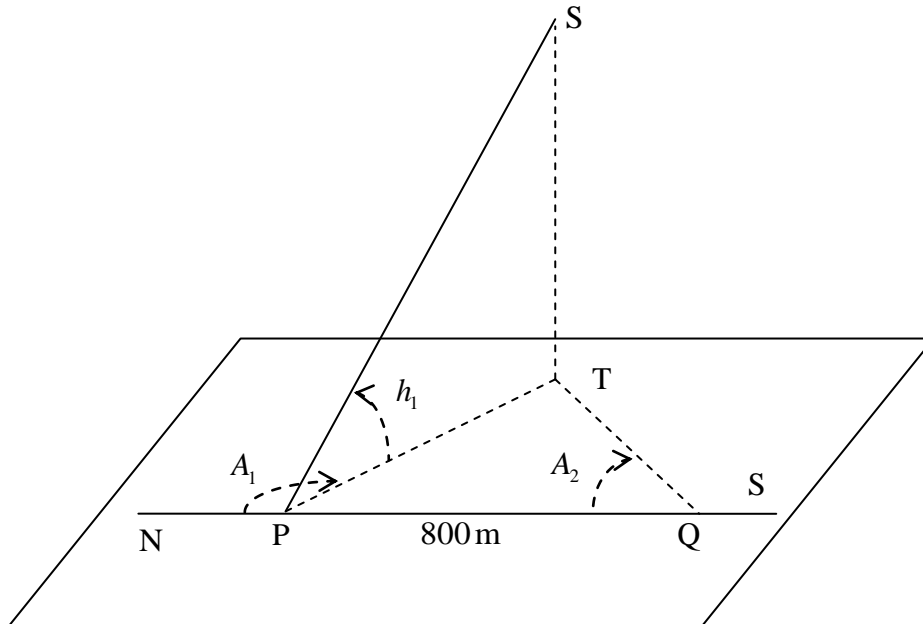


Baraj seniori - Soluții

Rezolvare Problema 1



În ΔPQT știm: $m\angle QPT = 180^\circ - A_1 = 63^\circ 24' 18''$; $m\angle PQT = 15^\circ 43' 36''$
 Rezultă: $m\angle PTQ = 180^\circ - (80^\circ - A_1 + A_2) = A_1 - A_2 = 100^\circ 52' 08'' = 100^\circ,869$;
 $\frac{\sin \angle PTQ}{PQ} = \frac{\sin A_2}{PT} \Rightarrow PT = \frac{PQ \cdot \sin A_2}{\sin \angle PTQ} = 220,80\text{m}.$

În ΔSTP , $tg \angle_1 = \frac{ST}{PT} \Rightarrow ST = PT \cdot tg \angle_1$;

$ST = 220,80 \cdot tg(85^\circ,492) = 2805,53\text{m} = 2,805 \text{ km}.$

Barem de corectare:

Poziționarea corectă a punctului de dispariție a meteorului față de observator	3 puncte
Determinarea poziției proiecției punctului pe orizont	3 puncte
Aflarea înălțimii la care steaua s-a stins	3 puncte
Oficiu	1 punct
Total	10 puncte

Rezolvare Problema 2

a) 1) γ la CS $\Rightarrow \theta = H + \alpha$; $\alpha_\gamma = 0^h$; $H = 0^h$; stea la CS $\Rightarrow \theta = 0^h$.

Pentru orice stea $\theta = H + \alpha$.

Pentru Vega, $H = \theta - \alpha = 0^h - 18^h 34^m = 24^h - 18^h 34^m = 5^h 26^m$, emisfera vestică. 1 punct

Pentru Capella, $H = \theta - \alpha = 24^h - 5^h 10^m = 18^h 50^m$, emisfera estică. 1 punct

2) γ la CI $\Rightarrow \theta = H + \alpha = 12^h + 0^h = 12^h$;

Pentru Vega, $H = \theta - \alpha = 12^h - 18^h 34^m = 36^h - 18^h 34^m = 17^h 26^m$, emisfera estică. 1 punct

Pentru Capella, $H = 12^h - 5^h 10^m = 6^h 50^m$, emisfera vestică. 1 punct

b) Capella la CI $\Rightarrow H = 12^h \Rightarrow \theta_{\text{Capella}} = 12^h + \alpha = 12^h + 5^h 10^m = 17^h 10^m$; 0.5 puncte

Vega la CS $\Rightarrow H = 0^h \Rightarrow \theta_{\text{Vega}} = 18^h 34^m$ 0.5 puncte

Stelele trec la meridian în ordinea crescătoare a ascensiei drepte \Rightarrow Capella și apoi Vega.

$$\theta = 18^h 34^m - 5^h 10^m = 13^h 24^m;$$

$$\theta_{\text{Vega}} - \theta_{\text{Capella}} = 18^h 34^m - 17^h 10^m = 1^h 24^m. \quad 1 \text{ punct}$$

c) H_c la CS a stelei Vega

$$\theta = H + \alpha = 0^h + 18^h 34^m = 18^h 34^m$$

Pentru Capella $18^h 34^m = H + 5^h 10^m \Rightarrow H = 13^h 24^m$ 1.5 puncte

H_c la CI a stelei Vega

$$\theta = 12^h + 18^h 34^m = 6^h 34^m$$

Pentru Capella $6^h 34^m = H + 5^h 10^m \Rightarrow H = 1^h 24^m$. 1.5 puncte

Barem de corectare:

a. Câte un punct pentru fiecare cerință4 puncte

b. Determinarea corectă a intervalului2 puncte

c. Aflarea corectă a unghiului orar al stelei Capella3 puncte

Oficiu1 punct

Total10 puncte

Rezolvare Problema 3:

a.)

Latitudine	nordică	sudică	total
0-10	14	55	69
11-20	9	8	17
21-30	3	1	4
31-40	0	1	1
41-50	1	0	1
51-60	0	0	0
61-70	0	0	0
71-80	0	0	0
81-90	0	0	0
TOTAL	27	65	92

Longitudine	nr
0°-30°	12
31-60	4
61-90	3
91-120	1
121-150	1
151-180	5
181-210	2
211-240	4
241-270	4
271-300	4
301-330	26
331-360	26
TOTAL	92

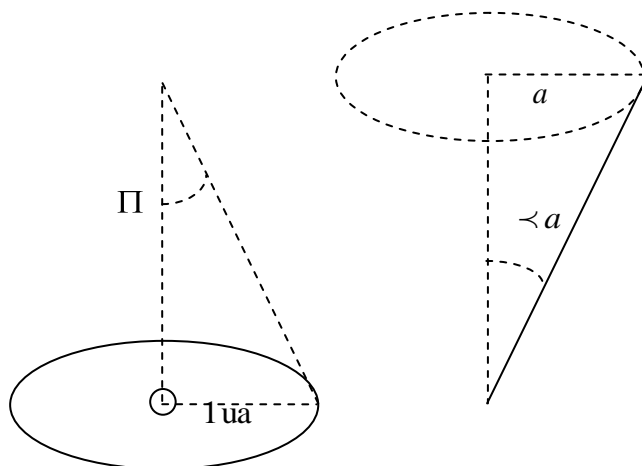
b.) Novele sunt stele a căror strălucire crește la un moment dat, ducând la scăderea magnitudinii stelei cu câteva ordine de magnitudine, după care steaua revine treptat la magnitudinea ei inițială. Un număr mare de nove se observă într-o zonă a cerului în care densitatea de stele este mare. Din tabele constatăm că stelele din vecinătatea noastră nu sunt uniform distribuite pe cer, ele se concentrează în vecinătatea planului galaxiei, la longitudinea galactică 0°-30°, respectiv 300°-360°. Distribuția stelelor arată ca Soarele face parte dintr-un sistem mai gigantic (galaxia) ale cărui componente se află în vecinătatea planului galactic.

c.) Centrul galaxiei trebuie să fie în constelația Săgetătorul ($l \approx 333^\circ$), acolo densitatea de nove este maximă. Soarele trebuie să fie în apropierea planului galactic în emisfera galactică sudică.

Barem de corectare:

Completarea tabelului (2x2 puncte) 4 puncte
 Densitatea de stele e proporțională cu densitatea novelor, forma sistemului3 puncte
 Poziția centrului galaxiei și a Soarelui2 puncte
Oficiu1 punct
Total10 puncte

Rezolvare Problema 4:



$$a.) \frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_B + m_C)}; \frac{P_P^2}{a_P^2} = \frac{4\pi^2}{Gm_S};$$

$$\frac{P^2}{P_P^2} \cdot \frac{a_P^3}{a^3} = \frac{m_S}{m_B + m_C} \Rightarrow \frac{P^2}{a^3} = \frac{1}{\frac{m_t}{m_S}}$$

$$\frac{m_t}{m_S} = \frac{a^3}{P^2}; \quad a^3 \text{ în } \langle \text{ua} \rangle \text{ și } P^2 \text{ în } \langle \text{ani} \rangle$$

$$\tan \Pi = \frac{1 \text{ ua}}{a};$$

$$\Pi'' \dots \dots \dots \Pi \langle \text{ad} \rangle$$

$$180 \cdot 3600 \dots \dots \dots 3,14156295$$

$$\Pi \langle \text{ad} \rangle = \frac{\Pi''}{206265}$$

$$\tan \Pi \approx \Pi \langle \text{ad} \rangle; \quad \Pi \text{ mic}$$

$$\frac{\Pi''}{206265} = \frac{1 \text{ ua}}{d};$$

$$d = \frac{1 \text{ pc}}{\Pi''} = \frac{1}{0,201} \text{ pc} = 4,975 \text{ pc}$$

$$\tan a = \frac{a}{d} \approx \frac{a''}{206265} \Rightarrow a = \frac{d \cdot a''}{206265} = \frac{206265 \cdot 1 \text{ ua} \cdot a''}{\Pi'' \cdot 206265}$$

$$a = \frac{a''}{\Pi''} \text{ ua} = 34,28 \text{ ua}.$$

$$\frac{m_t}{m_s} = \frac{\left(\frac{a''}{\Pi''}\right)^3}{P^2} = 0,655$$

$$\frac{a_B}{m_C} = \frac{a_C}{m_B} \Rightarrow \frac{a_B}{a_C} = \frac{m_C}{m_B} \Rightarrow m_C = 0,37m_B$$

$$m_B + m_C = 0,655m_s$$

$$1,37m_B = 0,655m_s \Rightarrow \frac{m_B}{m_s} = 0,478 \Rightarrow \frac{m_C}{m_s} = 0,655 - 0,478 \Rightarrow \frac{m_C}{m_s} = 0,177.$$

b) $M = m + 5 + 5 \log \Pi'' = 7,98 + 5 + 5 \log 2,201 \approx 9,5^m$

$$\frac{L_B}{L_S} = 10^{-0,4(M_B - M_S)} \Rightarrow \frac{L_B}{L_S} = 10^{-0,4(9,5 - 9,75)} = 10^{-0,1} = 0,0126$$

c) $L_B = 4\pi R_B^2 \sigma T_{eB}^4; L_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4; \frac{L_B}{L_S} = \frac{R_B^2}{R_S^2} \left(\frac{T_{eB}}{T_S}\right)^4;$

$$\frac{R_B}{R_S} = \sqrt{\frac{L_B}{L_S} \left(\frac{T_S}{T_{eB}}\right)^2} = 10^{-0,95} \left(\frac{6000}{16900}\right)^2 = 0,014$$

$$R_B = 9843,24 \text{ km}$$

$$R \sim 10^{-2} R_S$$

$$L \sim 10^{-2} L_S \text{ pitică albă.}$$

Barem de corectare:

Aflarea corectă a maselor componentelor4 puncte

Raportul luminozităților2 puncte

Raza și interpretarea3 puncte

Oficiu1 punct

Total10 puncte

Rezolvare Problema 5

(1 punct din oficiu)

a) – 0,5 puncte

Dacă $t_{p1} = 1.572$ este anul în care Tycho Brahe a observat explozia supernovei, iar t_s este anul producerii exploziei supernovei, atunci, pentru distanța parcursă de lumina propagată direct spre observatorul terestra, putem scrie că:

$$d_{SP} = \overbrace{c(t_{p1} - t_s)} = 7.500 \text{ ly,}$$

din care rezultă:

$$t_{p1} - t_s = \frac{7.500 \text{ ly}}{c};$$

$$t_s = t_{p1} - \frac{7.500 \text{ ly}}{c} = 1.572 \text{ an} - \frac{7.500 \cdot 94.608 \cdot 10^8 \text{ km}}{3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}};$$

$$t_s = 1.572 \text{ an} - 2.500 \cdot 94.608 \cdot 10^3 \text{ s};$$

$$t_s = 1.572 \text{ an} - 25 \cdot 94.608 \cdot 10^5 \text{ s};$$

$$t_s = 1.572 \text{ an} - \frac{25 \cdot 94.608 \cdot 10^5}{31.536 \cdot 10^3} \text{ ani};$$

$$t_s = 1.572 \text{ an} - 7.500 \text{ ani} = -5.928 \text{ an};$$

$$t_s = 5.928 \text{ îH},$$

adică explozia Supernovei a avut loc în anul $t_s = 5.928$ înainte de Hristos. **(0,25 puncte)**

În aceste condiții, distanța parcursă de lumină, de la locul exploziei (în anul 5.928 îH), pe traseul norului de praf interstelar, până la planeta Pământ (în anul 2008 dH), adică distanța parcursă de lumină pe durata a 7.936 ani, este:

$$d_{\text{SNP}} = 5.928 \text{ ly} + 2.008 \text{ ly} = 7.936 \text{ ly}, \quad \text{(0,25 puncte)}$$

fără să putem preciza anul t_N în care lumina a ajuns la norul de praf interstelar, reflectându-se spre Pământ (anul formării ecoului luminii pe norul de praf interstelar).

b) – 6 puncte

1) **1 punct** - Dacă există și un al doilea nor de praf interstelar, astfel încât lumina reflectată de el să ajungă la Pământ simultan cu lumina reflectată de primul nor interstelar, înseamnă că ecourile luminoase determinate de cei doi nori interstelari ajung simultan la observatorul de pe Pământ. Aceasta se poate întâmpla numai dacă suma distanțelor de la fiecare nor până la Supernovă și respectiv până la Pământ, este aceeași pentru fiecare dintre cei doi nori interstelari, adică:

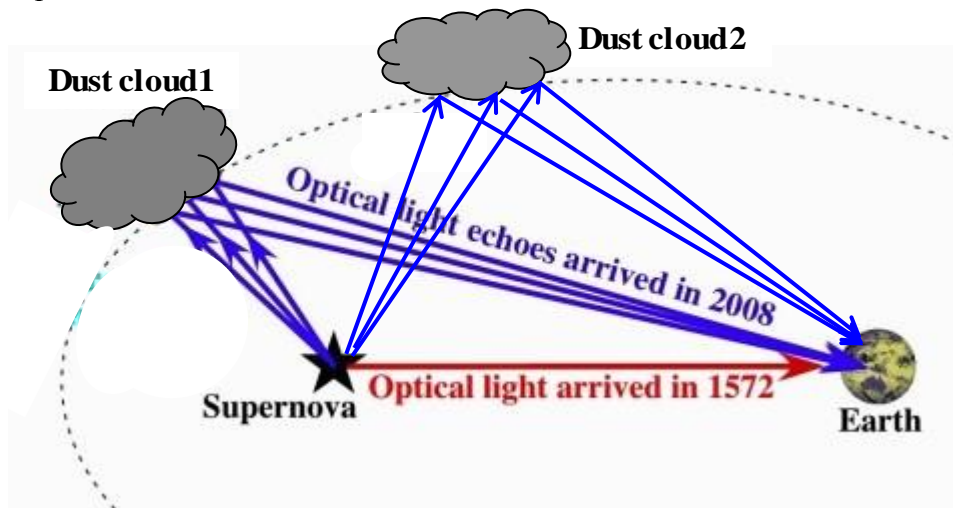
$$SC_1 + C_1P = SC_2 + C_2P = 7.936 \text{ ani lumină.}$$

Recunoaștem în afirmația anterioară, definiția elipsei, ca fiind locul geometric al punctelor dintr-un plan, pentru care suma distanțelor până la alte două puncte fixe din același plan, numite focare, este constantă.

Proprietatea optică a elipsei: o rază de lumină, plecată dintr-un focar al elipsei, după reflexia într-un punct al elipsei, va trece prin celălalt focar al elipsei.

Ca urmare, lumina plecată de la locul exploziei, supernova SN 1572, reflectată pe orice nor de praf interstelar aflat pe elipsă, va fi dirijată spre planeta Pământ, aflată în celălalt focar al elipsei.

2) **1 punct** - *Generalizare:* cei n nori interstelari, care în momente diferite ar fi putut produce ecouri luminoase diferite, ale luminii primite de la explozia supernovei SN 1572, dar care ar fi putut ajunge simultan la planeta Pământ în anul $t_{p2} = 2008$, trebuie să fie distribuiți pe suprafața interioară a unui elipsoid de revoluție, în ale cărui focare să se afle Supernova SN 1572 și respectiv planeta Pământ.

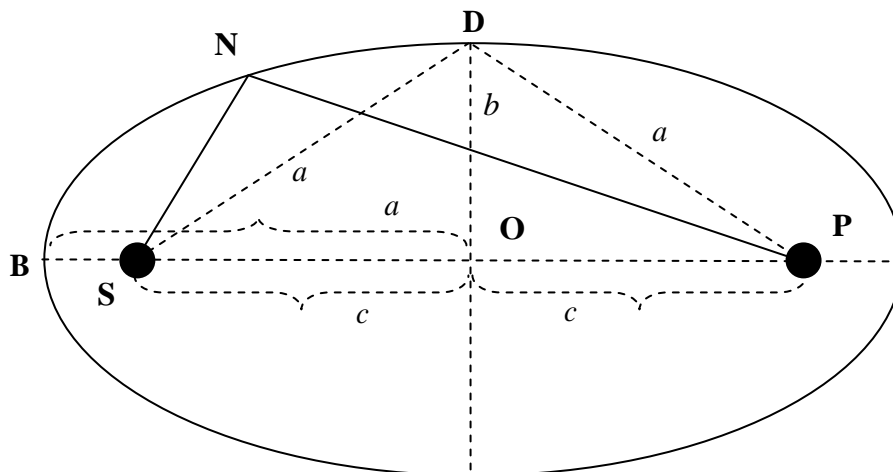


3) **1,5 puncte** - Pentru elipsa reprezentată în figura alăturată, în ale cărei focare se află Supernova Tycho și respectiv Pământul, avem:

$$SN + NP = 2a = 7.936 \text{ ani lumină};$$

$$SD + DP = 2a;$$

$$SD = DP = a = 3.968 \text{ ani lumină};$$



$$SP = 7.500 \text{ ani lumină;}$$

$$SP = SO + OP = 2 \cdot SO = 2c;$$

$$c = 3.750 \text{ ani lumină;}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1.297,12 \text{ ani lumină;}$$

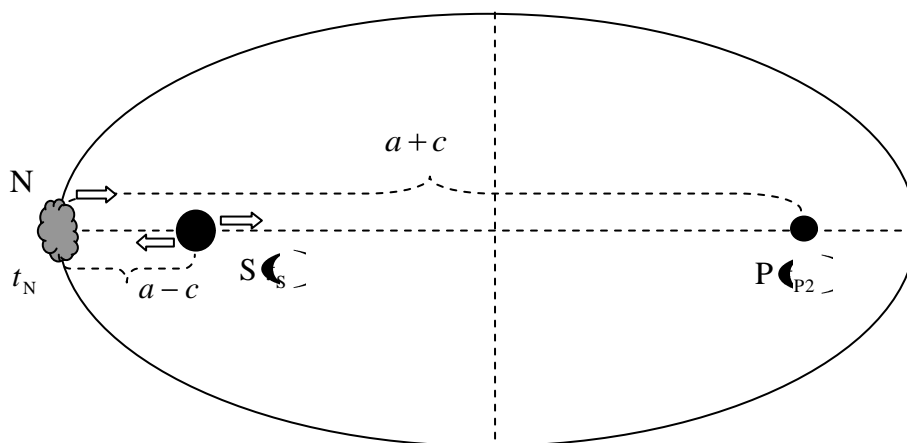
$$p = \frac{b^2}{a} \approx 424 \text{ ani lumină; } e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \approx 0,945.$$

4) **1,5 puncte** - Pentru lumina plecată, în momentul exploziei $\zeta = 5.928 \hat{H}$, de la supernova S spre norul de praf N, avem:

$$a - c = \zeta - t_N \vec{y};$$

$$t_N = t_S - \frac{a - c}{v} = 5.928 \hat{H} - \frac{3.968 \text{ ly} - 3750 \text{ ly}}{3 \cdot 10^5 \text{ kms}^{-1}} = 5.928 \hat{H} - \frac{218 \text{ ly}}{3 \cdot 10^5 \text{ kms}^{-1}};$$

$$t_N = 5.928 \hat{H} - \frac{218 \cdot 94608 \cdot 10^8 \text{ km}}{3 \cdot 10^5 \text{ km/s}} = 5.928 \hat{H} - 218 \cdot 31536 \cdot 10^3 \text{ s};$$



$$t_N = 5.928 \hat{H} - \frac{218 \cdot 31536 \cdot 10^3 \text{ ani}}{31536 \cdot 10^3} = 5.928 \hat{H} - 218 \text{ ani};$$

$$t_N = 5.710 \hat{H}.$$

Pentru ecoul luminii, plecat de la norul N, care a ajuns la Pământ în anul $t_{P2} = 2.008$, avem:

$$a + c = \zeta_{P2} - t_N \vec{y};$$

$$t_N = t_{P2} - \frac{a + c}{v} = 2008 - \frac{3968 \text{ ly} + 3750 \text{ ly}}{3 \cdot 10^5 \text{ km/s}} = 2.008 - \frac{7718 \text{ ly}}{3 \cdot 10^5 \text{ km/s}};$$

$$t_N = 2.008 - 7.718 = -5.710; t_N = 5.710 \hat{H},$$

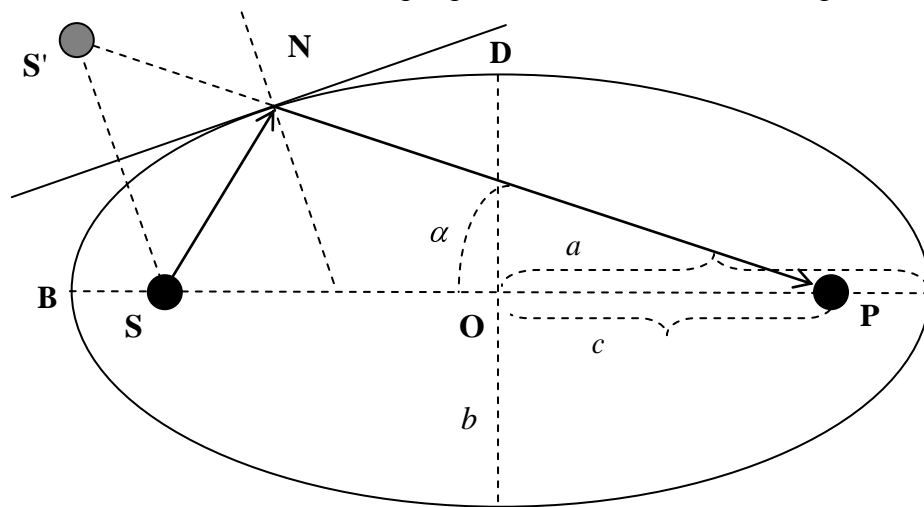
reprezentând anul formării ecoului luminii.

5) **1 punct** - Deoarece viteza luminii este constantă, orice raze de lumină, provenite dintr-o aceeași explozie trebuie să străbată distanțe egale. Când o rază de lumină este reflectată o singură dată, drumurile posibile între Supernovă (sursă) și Pământ (observator) corespund reflexiilor pe un elipsoid, în ale cărui focare se află Supernova și respectiv Pământul. În timp, acest elipsoid, se extinde.

Pământul este în unul din focarele unei elipse, iar supernova este în celălalt focar al unei elipse imaginare. O proprietate a elipsei este aceea că toate drumurile care pleacă dintr-un focar spre orice punct al elipsei și apoi trec prin celălalt focar au aceeași lungime. Ca urmare toate razele de lumină care pleacă simultan de la o supernovă și se reflectă pe norii de praf întâlniți pe o aceeași elipsă vor ajunge simultan la observatorul de pe Pământ. Ca urmare, pentru orice interval de timp scurs de la o explozie a unei supernove, există o elipsă corespundență și noi vedem ecoul luminii la acel moment dacă există nori de praf care intersectează elipsa respectivă. În trei dimensiuni, ecoul luminii este un elipsoid, deoarece praful interstelar este în straturi sau în filamente, secțiunile transversale ale acestor straturi de praf având forma unor cercuri sau a unor arcuri de cercuri.

c) – 3 puncte

Această lumină produce iluzia unui ecou care se extinde mai repede decât viteza luminii. Datorită geometriilor lor, ecurile luminii pot produce iluzia unor viteze superluminoase.



(pentru desen – 1 punct)

După reflexia luminii pe norul interstelar N, în anul t_N , când se formează ecoul luminii, și până când acesta ajunge la observatorul de pe Pământ, în anul $t_{P2} = 2008$, viteza luminii fiind c , rezultă că distanța parcursă de frontul ecoului luminii este: $d_{NP} = \overbrace{ct}^{\text{iluzie}}$, unde:

$$c = \frac{d_{NP}}{t_{P2} - t_N} = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}, \text{ în care } t_N \text{ este anul formării ecoului luminii și al plecării sale spre Pământ.}$$

Formarea ecoului luminii, prin reflexia luminii pe norul interstelar existent într-un punct N al elipsei, admițând că tangenta la elipsă în acel punct reprezintă o oglindă plană, în acord cu legile reflexiei luminii, așa cum indică figura alăturată, îl obligă pe observatorul terestru să aprecieze că frontul ecoului provine de la imaginea S' a supernovei S, după parcurgerea unei distanțe:

$$d_{S'NP} = d_{S'N} + d_{NP} > d_{NP}; \quad d_{S'N} = d_{SN}; \quad d_{S'N} + d_{NP} = 2a,$$

în același interval de timp, $\overbrace{ct}^{\text{iluzie}} = t_{P2} - t_N$, astfel încât, pentru viteza frontului ecoului luminii,

$$\text{pentru observatorul terestru există iluzia: } v = \frac{d_{S'NP}}{t_{P2} - t_N} > c. \quad \text{(1 punct)}$$

Din considerente asemănătoare, pentru observatorul terestru, P, care primește ecoul luminii, există și iluzia localizării în S' a supernovei S. **(1 punct)**