PROBA TEORETICĂ
Barem - SENIORI

NOTA: FIECARUI SUBIECT I SE ATRIBUIE UN PUNCT DIN OFICIU. ACEST PUNCT ESTE MARCAT IN DREPTUL FIECAREI PROBLEME CAREIA I SE ACORDA DE LA SUBIECTUL RESPECTIV.

BAREMUL ESTE ORIENTATIV.

SUBIECTUL I:

1. Prin perioadă a unui orologiu se înțelege intervalul de timp în care indicația orologiului evoluează cu 24 de ore. Astfel un orologiu obişnuit de timp legal trebuie să aibă o perioadă de 24^h iar unul de timp sideral are perioada de $23^h\ 56^m\ 4^s,1$.

Un orologiu special este instalat la bordul unui satelit artificial care are planul orbitei în planul ecuatorului Pământului, pe o traiectorie circulară de altitudine 1000km. Acest orologiu este reglat astfel încât să indice mereu timpul sideral al punctului de pe ecuator la al cărui zenit se găseşte. Care este perioada acestui orologiu?

(5 puncte)

Barem de notare:

Perioada satelitului este dată de legea a 3-a a lui Kepler generalizată:

$$P=\sqrt{(R+H)^3\frac{4\pi^2}{gR^2}}=\sqrt{(R+H)^3\frac{4\pi^2}{KM}},$$ **(1 punct)**

unde R este raza Pământului, M-masa Pământului, g accelerația gravitațională iar K este constanta atracției gravitaționale.

Dacă $g=9.81m/s^2$ iar $R=6378Km$ se obține $P=6303.31s=1.75h$. **(1 punct)**

Perioada orologiului este egală cu perioada satelitului. **(1 punct)**

Această afirmație trebuie demonstrată, fie analitic, fie din considerente geometrice în urma unui raționament riguros de tipul:
- după o perioadă siderală punctul deasupra căruia se va afla satelitul va avea acelaşi timp sideral local ca şi punctul de pornire
- nici un alt punct de pe traiectoria corespunzătoare unei perioade siderale nu se bucură de această proprietate. **(2 puncte)**

SAU

Analitic, demonstrația poate fi făcută astfel:

Să considerăm mişcarea satelitului pe un interval de timp legal Δt de deasupra punctului A de pe ecuator, până deasupra punctului B de pe ecuator. Vom calcula diferenţa de timp sideral indicată de satelit în acest interval, $\Delta\theta$. Perioada ceasului, T, va fi (regula de trei simplă):

$$T = 24h\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (1)$$ **(0.5 puncte)**

Într-un sistem de referinţă neangrenat în mişcarea de rotaţie a Pămâtului, în acest interval, satelitul descrie un arc de cerc de $\Delta\alpha_1 = 360^0\frac{\Delta t}{P}$.

Notând cu $P_\oplus$ ziua siderală, observăm că Pământul descrie în acelaşi interval arcul

$\Delta\alpha_2 = 360^0\frac{\Delta t}{P_\oplus}$. **(0.25 puncte)**

Diferenţa de longitudine dintre A şi B va fi: $L_B - L_A = \Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_2$. **(0.25 puncte)**

În intervalul de timp Δt, în ambele locaţii se scurge un interval de timp sideral:

$$\Delta\theta_0 = \frac{366.2422}{365.2422}\Delta t$$

Notând θ_{0A} timpul sideral în A atunci când satelitul trece pe deasupra sa şi cu θ_{1B} timpul sideral în B atunci când satelitul trece deasupra acestuia.

Vom avea atunci:

$$\theta_{1B} = \theta_{0A} + L_B - L_A + \Delta\theta_0,$$

de unde: $\Delta\theta = \theta_{1B} - \theta_{0A} = 24^h\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{P_\oplus}\right)\Delta t + \frac{366.2422}{365.2422}\Delta t.$ **(0.5 puncte)**

Având în vedere faptul că $P_\oplus = 24^h\frac{365.2422}{366.2422}$ se obţine $\Delta\theta = 24^h\frac{\Delta t}{P}$ (2). **(0.5 puncte)**

Din (1) şi (2) se obţine T=P.

2. Într-o zi, un curier va bate la uşa unui laborator de fizică pentru a livra un colet pe care scrie: „Kit de instalare a găurilor negre, manevraţi cu grijă”. Imediat după livrarea coletului ar fugi cât l-ar ţine picioarele. Însă curierul nu a citit toate indicaţiile de pe colet: „Pentru cititorii îngrijoraţi: găurile negre optice sunt sigure.”

În anul MMMXXXLLL din viitor, omenirea a învăţat să creeze găuri negre din asteroizi, pentru a elimina pericolul iminent de ciocnire a Pământului cu un asteroid. Care ar fi diametrul unei astfel de găuri negre, creată dintr-un asteroid cu masa de $9.1\times10^{16}kg$? De câţi asteroizi de acest tip ar fi nevoie pentru a crea o gaură neagră ce ar modifica energia unui foton provenit de la o stea ocultată gaura neagră cu 50%?

(4 puncte)

Barem de notare:

fie M - masa asteroidului

Raza unei gauri negre este data de raza sa Schwarzschild (asteroidul trebuie sa "colapseze" in interiorul razei sale Schwarzschild, pentru a se transforma in gaura neagra):

$r_S = \frac{2KM}{c^2}$, unde K este constanta atractiei universale **(1 punct)**

Pentru asteroidul considerat avem se obtine $r_s = 13.57 \cdot 10^{-5} m$, unde s-a considerat $K = 6.67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$, iar viteza luminii $c = 2.99 \cdot 10^5 m \cdot s^{-1}$.

Deci diametrul gaurii negre va fi: $D = 27.14 \cdot 10^{-5} m$ **(1 punct)**

Variatia lungimii de unda datorata campului gravitational:

$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{\frac{2GM}{c^2} c^2} = \frac{1}{2}$, adica $\frac{\lambda_f - \lambda_i}{\lambda_i} = \frac{1}{2}$, **(0.5 puncte)**

De unde se obtine raportul energiilor (initiala si finala) $\frac{E_i}{E_f} = \frac{3}{2}$,

deci $E_f = \frac{2}{3} E_i = 66\% E_i$.

Pentru n asteroizi si un raport $\frac{E_f}{E_i} = 50\%$, se obtine $n = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.66} \simeq 1.66$. Deci ar fi nevoie de 1.66 asteroizi pentru a se modifica energia fotonului cu 50%. **(0.5 puncte)**

+ 1 punct din oficiu

SUBIECTUL II

1. Astronomii coreeni şi-au lansat primul satelit artificial, pentru a transmite cântece patriotice în Sistemul Solar. Pentru o mai bună receptare a cântecelor, satelitul se roteşte în jurul Pământului pe o orbita eliptică, aflată în planul eclipticii. Urmărind traseul satelitului, cercetătorii au descoperit un lucru interesant: când satelitul se află la perigeul orbitei sale, distanța sa față de Pământ este aceeaşi cu distanța medie între Ioo şi Jupiter (421600 km). Neținând cont de influența Lunii, determinați maximul excentricității posibile a orbitei satelitului.

(7 puncte)

Barem de notare:

Presupunem ca apogeul orbitei satelitului se afla in interiorul punctelor Lagrange ale sistemului Pamant-Soare (altfel orbita sa ar fi instabila, transformandu-se in orbita heliocentrica). **(1 punct)**

Aceste punce se rotesc in jurul Soarelui cu aceeasi viteza unghiulara ω, ca si Pamantul.
Ecuatia de miscare a punctelor Lagrange va fi:

$$\frac{KM}{(R-a)^2}-\frac{Km}{a^2}=\omega^2(R-a)$$

iar ecuatia de miscare a Pamantului este data de: $\frac{KM}{R^2}=\omega^2 R$,

unde a-apogeul orbitei satelitului,

R-distanta Soare-Pamant

K-constanta atractiei universale

M- masa Soarelui

m-masa Pamantului

Tinand cont de faptul ca $a \ll R$, din cele doua ecuatii se obtine:

$\frac{KM}{(R-a)^2}=\frac{KM}{R^2}+\frac{2GMa}{R^3}$ si $\frac{3GMa}{R^3}=\frac{Gm}{a^3}$, de unde **(2 puncte)**

$$a=R\left(\frac{m}{3M}\right)^{\frac{1}{3}}=1.497\cdot 10^6\, km.$$ **(2 puncte)**

Excentricitatea orbitei va fi $e=\frac{a-p}{a+p}\cong 0.55$ **(1 punct)**

+ 1 punct din oficiu

2. Un avion supersonic zboară din Greenville, Texas (latitudine 33^0 06' N, longitudine 96^0 12' V) la Los Angeles, California (latitudine $33^0$54' N, longitudine $118^0$24' V) urmând traiectoria de distanță minimă dintre cele două aeroporturi. Altitudinea avionului este 10 km şi viteza sa față de sol este 1400 km/h. O anumită stea este vizibilă pe fereastra avionului pe toată durata zborului între cele două localități.

a) Dacă zborul ar fi continuat pe aceeaşi traiectorie, după cât timp de la plecarea din Los Angeles şi la ce longitudine ar fi ajuns avionul deasupra ecuatorului Pământului?

b) Care este valoarea minimă posibilă pentru declinația stelei?

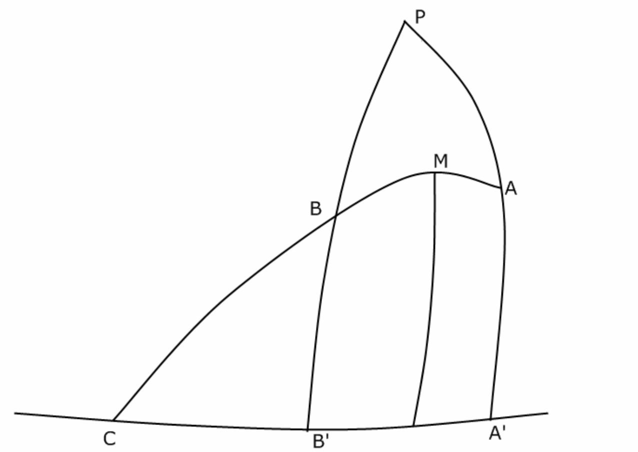
Suprafața Pământului se va considera a fi o sferă de rază 6370 km.

(7 puncte)

Barem de notare:

Traiectoria de cea mai scurtă este cercul mare care trece prin punctele A şi B, planul acestuia conținând centrul Pământului.

Notăm A = punctul de pornire, B = destinația, C = intersecția traiectoriei cu ecuatorul, P = polul nord al Pământului, M = punctul de latitudine maximă a traiectoriei. L longitudinile, φ latitudinile.



Avem (vezi figura):

φ_A = AA' = $33,1^0$

$L_A = -96,2^0$

φ_B = BB' = $33,9^0$

$L_B = -118,4^0$

$PA = 90^0 - \varphi_A = 56,9^0$

$PB = 90^0 - \varphi_B = 56,1^0$

$P = L_A - L_B = 22,2^0$

Prin aplicarea formulelor lui Gauss în triunghiul PAB, obținem:

$$\cos AB = \cos PA \; \cos PB + \sin PA \; \sin PB \; \cos P$$

$$\sin AB \cos B = \cos PA \sin PB - \sin PA \cos PB \cos P$$

$$\sin AB \sin B = \sin PA \sin P$$

de unde rezultă AB = $18,494^0$, B = $86,263^0$. **(0.5 puncte)**

Triunghiul BB'C trebuie rezolvat în caz unghi-latură-unghi pentru a obține laturile B'C și BC, ceea ce presupune utilizarea formulelor lui Gauss pentru unghiuri. Având însă în vedere faptul că unghiul B' este de 90^0, precum şi acela că din construcție atât BC cât şi B'C sunt mai mici de 180^0 (deci este suficientă determinarea sinusului sau a tangentei, nu este nevoie de ambele funcții trigonometrice ca în cazul general), putem calcula aceste laturi şi prin utilizarea formulelor lui Gauss obişnuite.

(0.5 puncte)

Astfel, aplicând formula celor cinci elemente, vom obține:

$$\sin B'C \cos B' = \cos BC \sin BB' - \sin BC \cos BB' \cos B;$$

de unde, avand in vedere că $B'=90^0$ obținem:

$$tgBC = \frac{BB'}{\cos B}$$

şi deci BC = $84,46^0$. **(0.5 puncte)**

Apoi, aplicând teorema cosinusului în acelaşi triunghi vom avea:

$$\cos B'C = \cos BB' \cos BC + \sin BB' \sin BC \cos B;$$

de unde B'C = 83,32^0.

Longitudinea punctului C este:

$$L_C = L_B - B'C = -201,72^0$$

răspunsul corect fiind 158^0 17' longitudine estică! **(1 punct)**

Timpul scurs din A până în C se obține printr-un calcul simplu:

$$\Delta t = \frac{(AB+BC)\pi}{180}\cdot\frac{(6370+10)Km}{1400\,km/h} = 8^h 11^m$$ **(0.5 puncte)**

b) Din orice punct din emisfera nordică, astrul de declinație minimă vizibil este cel care are culminația superioară cel mai aproape de punctul cardinal Sud. **(0.5 puncte)**

Declinația minimă a unei stele vizibile din avion de la latitudinea φ este dată de formula:

$$\delta = \varphi - 90^0 - r_0 - \Delta o$$

unde r_0 = 34' este refracția orizontală, iar $\Delta o = \arccos(R/(R+h))$ este unghiul cu care coboară orizontul la altitudinea h, R fiind raza Păm\ntului.

Deoarece astrul este vizibil tot timpul zborului, declinația minimă se va găsi la latitudinea maximă a traiectoriei:

$$\delta_{\min} = \varphi_{\max} - 90^0 - r_0 - \Delta o\,;$$ **(0.5 puncte)**

Punctul de latitudine maximă de pe cercul mare al traiectoriei se găseşte la longitudinea

$$L_M = L_C + 90^0 = -108,28^0$$

ceea ce înseamnă că latitudinea maximă este atinsă de avion între A şi B! **(1 punct)**

Valoarea latitudinii maxime este egală cu unghiul de înclinare al planului traiectoriei față de planul ecuatorului şi este egală cu unghiul C al triunghiului BCB'. Acesta se poate estima cu ajutorul teoremei sinusurilor în acest triunghi:

$$\frac{\sin C}{\sin BB'} = \frac{\sin B(=1)}{\sin BC}$$

de unde $\varphi_{\max} = C = 34{,}08^0$. Rezultatul final este:

$$\delta_{\min} = -59^0{,}42'$$ **(1 punct)**

Observații. **(1 punct)**

1. Având în vedere faptul că avionul se deplasează de la Est la Vest cu viteza de 1400 km/h, el parcurge în medie 15^0 pe oră între A şi B şi deci are o viteză unghiulară foarte apropiată de cea a

Pământului. De asemenea, deoarece steaua de declinație minimă este la culminație, mişcarea sa diurnă aparentă este paralelă cu orizontul, pentru un interval de timp variația înălțimii sale fiind minimă. Din acestea rezultă faptul că mişcarea diurnă aparentă a stelei nu afectează rezultatul.

2. Refracția orizontală la altitudinea h este mai mare decât r_0, dar estimarea acestei diferențe nu este posibilă decât prin utilizarea unui model al densității atmosferei terestre, iar efectul acestui fapt asupra rezultatului este nesemnificativ.

SUBIECTUL III

Un telescop este instalat pe o montură orizontală prevăzută cu două motoare de antrenare identice, unul responsabil de modificarea azimutului, celălalt de modificarea înălțimii direcției spre care este orientat telescopul. Sistemele mecanice care transmit mişcarea de la motoare la montură, de asemenea identice, sunt capabile să atingă o viteză unghiulară minimă de 30'/h, atât în azimut cât şi în înălțime. Sistemul de control al monturii poate varia vitezele unghiulare ale celor două mişcări, acestea putând lua doar valori care sunt multipli întregi ai vitezei unghiulare minime (30'/h).

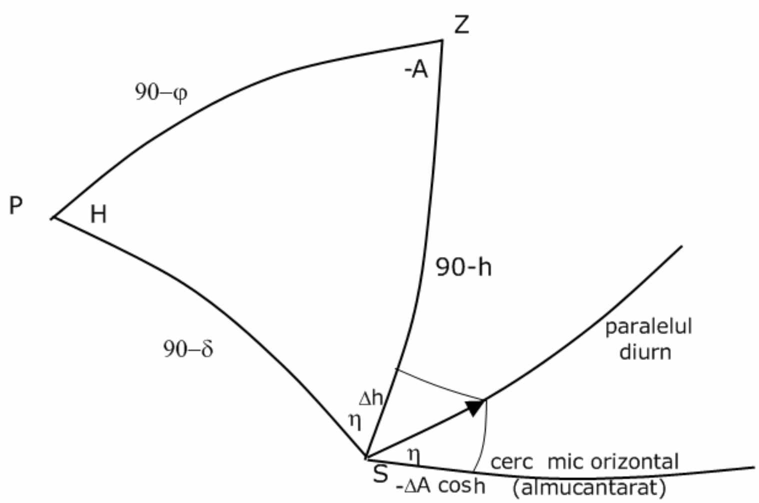
Cunoscând latitudinea locului de observație şi direcția Nordului, sistemul de control este capabil să urmărească mişcarea diurnă a oricărei stele, prin ajustarea celor două viteze unghiulare astfel încât centrul câmpului vizual (axa optică principală a telescopului) să rămână cât mai aproape de cea inițială, în momentul pornirii mecanismului. Vitezele unghiulare necesare sunt recalculate de computer în fiecare secundă. Telescopul este folosit într-o locație de latitudine 50^0 şi este orientat spre o stea care are în acel moment înălțimea de 60^0 şi azimutul de 45^0 (Nord - Est), mecanismul de urmărire fiind pornit.

a) Care ar trebui să fie raportul dintre vitezele unghiulare ale mişcării în azimut şi în altitudine?

b) Care este distanța unghiulară maximă (eroarea de urmărire) dintre centrul câmpului şi steaua considerată după o secundă de la pornirea mecanismului de urmărire?

(7 puncte)

Barem de notare:



a) Metoda 1.
Se observă faptul că unghiul făcut de paralelul diurn al astrului cu almucantaratul este egal cu unghiul paralactic al astrului, format de cercul vertical şi de cercul orar al astrului, cele două unghiuri având laturile perpendiculare.
Dacă deplasarea diurnă aparentă este descompusă pe direcţia almucantaratului (direcţia de înălţime constantă) şi pe direcţia cercului vertical (azimut constant) vom obţine:

$$tg\ \ \eta = -\frac{\Delta h}{\Delta A\ \ \cosh}$$ **(2 puncte)**

termenul $\cos\ h$ datorându-se faptului că cercul orizontal este un cerc mic, de rază $R\cos\ h$, unde R este raza (arbitrară) a sferei cereşti.

$tg\,\eta$ poate fi găsit din formula celor cinci elemnte şi teorema sinusurilor aplicate triunghiului de poziţie PZS:

$$\sin(90-\delta)\cos\eta = \cos(90-\varphi)\sin(90-h) - \sin(90-\varphi)\cos(90-h)\cos A$$
$$\sin(90-\delta)\sin\eta = -\sin(90-\varphi)\sin A$$

De unde

$$\mathrm{tg}\,\eta = \frac{\cos\varphi\ \sin A}{\sin\varphi\cos h - \cos\varphi\sin h\cos A}$$

Raportul dintre turațiile celor două motoare va fi:

$$\frac{\Delta A}{\Delta h} = \frac{tg\varphi}{\sin A} - \frac{tgh}{tgA}$$ **(1 punct)**

Metoda 2.

Dacă aplică formulele lui Gauss triunghiului de poziție PZS pntru a obține coordonatele orare, vom avea:

$$\begin{aligned} \sin\delta &= \sinh\sin\varphi + \cos h\cos\varphi\cos A \\ \cos\delta\cos H &= \sin h\cos\varphi - \cos h\sin\varphi\cos A \\ \cos\delta\sin H &= -\cos h\sin A \end{aligned}$$

Derivâd ambii membri ai acestor ecuații în raport cu H, prin rezolvarea sistemului rezultat putem calcula derivatele:

$$\frac{dA}{dH} = \sin\varphi - tgh\ \cos A\cos\varphi$$
$$\frac{dh}{dH} = \sin A\ \cos\varphi$$ **(2 puncte)**

Aceste ecuații pot fi deduse şi prin considerarea unor modificări mici dh, dA şi dH, aplicarea formulelor de transformare pentru *h+dh, A+dA, H+dH* şi neglijarea termenilor mici (a termnilor de ordinul 2 în *dh, dA* şi *dH*).

Din aceste formule, putem deduce raportul turațiilor celor două motoare:

$$\frac{dA}{dh} = \frac{tg\varphi}{\sin A} - \frac{tg\,h}{tg\,A}$$ **(1 punct)**

Prin ambele metode, rezultatul numeric obținut este: -0,0466567139, valoarea negativă datorându-se faptului că azimutul scade în timp ce înălțimea creşte. **(1 punct)**

b) În intervalul de timp de 1 secundă

$$\Delta H = \frac{366.2422}{365.2422}s = 15{,}041''$$

de unde rezultă:

$$\Delta A = \left(\sin\varphi - tgh\cos A\cos\varphi\right)\Delta H = -0,3189667''$$

şi

$$\Delta h = -\sin A\ \cos\varphi\,\Delta H\ = 6.8364587''$$ **(2 puncte)**

Aceste valori pot fi calculate şi folosind metoda I, prin descompunerea lui ΔH în $\Delta A\cosh$ *si* Δh.

Motoarele de antrenare pot realiza rotații care sunt multipli întregi ai valorii 30'/h = 0,5"/s. În intervalul de o secundă antrenarea în azimut va fi valoarea cea mai apropiată de 0,31989 şi anume -0,5", respectiv în înălțime de 7". Se vor obține erorile de urmărire: $\delta A = 0.181''$, $\delta\mathrm{h} = 0.1635''$; distanta unghiulară între stea şi centrul câmpului putând fi calculată cu aproximația:

$$\delta = \sqrt{\left(\delta h\right)^2 + \left(\cos h\cdot\delta A\right)^2} = 0,187''$$ **(1 punct)**

+ 1 punct din oficiu

Notă: - timp de lucru 3 ore.
- fiecare din cele trei subiecte va fi redactat pe câte o foaie de concurs tipizată.